

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**
ETAPA LOCALĂ, BOTOȘANI, 15.02.2025**Clasa a XII-a****Barem de corectare și notare****Subiectul I (7 puncte)**

Se consideră funcțiile $f, F : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin 7x}{\sin x}$ și $F(x) = x + \sin 2x + \frac{1}{2} \sin 4x + \frac{1}{3} \sin 6x$.

Arătați că $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Supliment G.M. 9/2024

Soluție:

Oficiu.....1p

$F'(x) = 1 + 2 \cos 2x + 2 \cos 4x + 2 \cos 6x, x \in (0, \pi)$ 1p

$F'(x) \sin x = \sin x + 2 \sin x \cos 2x + 2 \sin x \cos 4x + 2 \sin x \cos 6x$ 1p

$F'(x) \sin x = \sin x + 2 \frac{1}{2} (\sin(x + 2x) + \sin(x - 2x)) + 2 \frac{1}{2} (\sin(x + 4x) + \sin(x - 4x)) +$

$+ 2 \frac{1}{2} (\sin(x + 6x) + \sin(x - 6x))$ 2p

$F'(x) \sin x = \sin x + \sin 3x - \sin x + \sin 5x - \sin 3x + \sin 7x - \sin 5x = \sin 7x$ 1p

$F'(x) = \frac{\sin 7x}{\sin x} = f(x) \Rightarrow \int f(x)dx = F(x) + C$ 1p

Subiectul II (7 puncte)

a) Arătați că $0 < \ln(1 + x) < x, \forall x > 0$.

b) Demonstrați că șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ definit prin $I_n = \frac{1}{n} \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln(1 + \cos x) dx$, pentru oricare $n \geq 1$, este

convergent și determinați limita sa.

Soluție:

Oficiu.....1p

a) Demonstrația $0 < \ln(1 + x) < x$, pentru oricare $x > 0$2p

b) Pentru $x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$ avem $\cos x > 0$ deci $0 < \ln(1 + \cos x) < \cos x$ (1).....1p

Funcțiile din inegalitățile (1) sunt continue deci integrabile pe $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ și integrând obținem

$0 < \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln(1 + \cos x) dx < \int_{\frac{1}{n}}^1 \cos x dx = \sin 1 - \sin \frac{1}{n}$1p

$0 < I_n < \frac{1}{n} (\sin 1 - \sin \frac{1}{n})$1p

Șirul $a_n = \sin 1 - \sin \frac{1}{n}$ este mărginit, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ deci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\sin 1 - \sin \frac{1}{n}) = 0$

Din criteriul cleștelui obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$1p

Subiectul III (7 puncte)

Fie (G, \cdot) un grup cu elementul neutru e .

a) Dacă $x^2 = e, \forall x \in G$, arătați că grupul este comutativ.

- b) Dacă G este finit, comutativ și $x^2 = e$ pentru mai mult de jumătate din elementele lui G , arătați că $x^2 = e$, $\forall x \in G$.

Soluție:

- a) $(xy)^2 = e = ee = x^2y^2 = xxyy \rightarrow xy = yx$ 2p
 b) Arata ca $H = \{x \in G | x^2 = e\}$ este subgrup în G 2p
 Ordinul lui H divide ordinul lui G (teorema lui Lagrange)2p
 $\text{Ord}(H) > \text{ord}(G)/2$, deci $\text{ord}(H) = \text{ord}(G)$, prin urmare $H = G$1p

Subiectul IV (7 puncte)

Fie $(G, *)$ un grup și $H \subset G$ un subgrup propriu al său. Determinați funcția $f: G \rightarrow G$ astfel încât $f(e) = a \in G$, unde e este elementul neutru al lui G și

$$f(x * y) = x * f(y), \forall x, y \in G \setminus H.$$

Soluție:

- Oficiu.....1p
 Fie $x \in G \setminus H$. Atunci $x' \in G \setminus H$ unde x' este simetricul lui x din grupul G 1p
 $a = f(e) = f(x' * x) = x' * f(x)$ de unde rezultă $f(x) = x * a, \forall x \in G \setminus H \cup \{e\}$ 1p
 Dacă $y \in H$ și $x \notin H$ atunci $x * y \in G \setminus H$ și $f(x * y) = x * y * a$ 1p
 $x', x * y \in G \setminus H$ și $f(y) = f(x' * (x * y)) = x' * f(x * y) = x' * (x * y * a) = y * a, \forall y \in H$ 2p
 Prin urmare $f(x) = x * a, \forall x \in G$ verifică condițiile din enunț.....1p